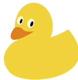
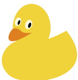
ENS de Lyon — L3 | Algèbre 1 — 2023-2024

TD 8 : Formes quadratiques, épisode 2 : Réduction de Gauss et classification

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Sauf mention du contraire, K désigne un corps de caractéristique différente de 2.



Exercice 1. (Réduction de Gauss et théorème de Sylvester)

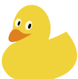
1. Pour chacune des formes quadratique suivantes, donner une décomposition en somme de carrés à l'aide de l'algorithme de Gauss, et calculer son rang, son noyau, et son discriminant.

  (a) $q_1(x, y, z) = (x + y)^2 - z^2$ sur K^3 ;

  (b) $q_2(x, y, z) = xy + yz + zx$ sur K^3 ;

  (c) $q_3(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + xy - xz$;

2. On prend $K = \mathbb{R}$. Pour chacune des formes quadratiques ci-dessus, donner leur signature, un sous-espace maximal sur lequel elles sont définies positives, et un sous-espace maximal sur lequel elles sont définies négatives.



Exercice 2. (Formes quadratiques associées à la trace)

1. Déterminer le rang des formes quadratiques suivantes, et quand $K = \mathbb{R}$ leur signature.

  (a) $q_1(M) = \mathrm{Tr}(M)^2$ sur $M_n(K)$;

  (b) $q_2(M) = \mathrm{Tr}({}^tMM)$ sur $M_n(K)$;

  (c) $q_3(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $M_n(K)$.

2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de signature (r, s). Calculer la signature de $q_4(M) = \mathrm{Tr}({}^tMSM)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (Signature et mineurs principaux)

Soit (E, q) un espace quadratique. On suppose que q est non dégénérée.

1. Soit δ le determinant d'une matrice de q. Soit H un hyperplan de E et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H orthogonale pour q. Montrer qu'il existe $e_n \in E$ tel que $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et tel que la matrice de q dans la base $\mathbf{e}$ soit diagonale de déterminant δ.

2. Pour une matrice $A \in M_n(K)$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note Δ_i le i-ième mineur principal de A, c'est-à-dire le déterminant de la matrice $(A_{k,\ell})_{k,\ell \in [\![1,i]\!]}$.
Soit $S \in S_n(K)$ la matrice de q dans une base de E. On suppose que tous les mineurs principaux de S sont non nuls. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de q dans cette base soit diagonale égale à

$$\mathrm{diag}\left(\Delta_1(S), \frac{\Delta_2(S)}{\Delta_1(S)}, \dots, \frac{\Delta_n(S)}{\Delta_{n-1}(S)}\right).$$

3. On garde les notations et les hypothèses de la question précédente. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Montrer que la signature de q est égal à $(n-s, s)$ où s est le nombre de changement de signes dans la suite $(1, \Delta_1(S), \Delta_2(S), \dots, \Delta_n(S))$.

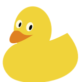
Exercice 4. (Formes quadratiques anisotropes réelles et Cauchy-Schwarz)

Soit (E, q) un espace quadratique réel. On note ϕ la forme polaire de q.

1. Montrer que q est anisotrope si et seulement si q est définie positive ou définie négative.
2. On suppose que q est non nulle. Montrer que q est anisotrope si et seulement elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in E,\ \phi(x,y)^2 \leqslant q(x)q(y),$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.
3. Montrer que $\ker(q) = C(q)$ si et seulement si q est positive ou négative.



Exercice 5. (Formes quadratiques sur les corps finis)

Soit p un nombre premier différent de 2 et $\mathbb{F}_q$ un corps fini à $q = p^k$ éléments.

1. **(a)** Déterminer le noyau du morphisme $c : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times$, définie par $x \mapsto x^2$. En déduire qu'il y a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$.
   (b) Montrer que pour a, $b \in \mathbb{F}_q^\times$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a toujours des solutions dans $\mathbb{F}_q$.

On fixe $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ qui n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$. Soit (E, Q) un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel quadratique. On note $n = \dim(E)$.

2. On suppose $\dim(E) = 1$ et Q non dégénérée. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de Q dans cette base est égale à (1) ou (α).
3. On suppose uniquement que Q est non dégénérée. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de q dans cette base est égale à I_n ou $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
4. En déduire que, dans le cas général, Q peut s'écrire

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 \qquad \text{ou} \qquad Q = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i^2 + \alpha\lambda_r^2$$

où $r \leqslant n$ et les $\lambda_i \in E^*$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes.

Exercice 6. (Loi de réciprocité quadratique)

Soit p un nombre premier impair. On définit le *symbole de Legendre* $\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \mid a \\ 1 & \text{si } p \nmid a \text{ et } a \text{ est un carré modulo } p \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré modulo } p \end{cases}$$

On a de plus $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.

On veut démontrer dans cet exercice la loi de *réciprocité quadratique* : Pour tout nombres premiers impairs distincts p, q, on a

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

On note $X = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{F}_q^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1\}$. On va calculer son cardinal de deux manières différentes.

1. On fait agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X par $k \cdot (x_1, ..., x_p) = (x_{k+1}, ..., x_{k+p})$.

 (a) Que dire sur les orbites de l'action ?

 (b) En utilisant la formule des classes, démontrer que $|X| \equiv 1 + \left(\frac{p}{q}\right)$ $[p]$.

2. On note f la forme quadratique de $\mathbb{F}_q^p$ définie par :

$$f(x_1, ..., x_p) = x_1^2 + ... + x_p^2.$$

On note $d = \frac{p-1}{2}$, et g la forme quadratique de $\mathbb{F}_q^p$ définie par :

$$g(y_1, z_1, ..., y_d, z_d, t) = 2\sum_{i=1}^{d} y_i z_i + (-1)^d t^2.$$

 (a) À l'aide de l'exercice précédent, montrer que f et g sont congruentes. En déduire que $|X| = |X'|$, où $X' = \{(y_1, z_1, ..., y_d, z_d, t) \in \mathbb{F}_q^p \mid 2\sum_{i=1}^{d} y_i z_i + (-1)^d t^2 = 1\}$. On va à présent compter les éléments de X'.

 (b) Combien y a-t-il d'éléments de X' tels que tous les y_i sont nuls ?

 (c) Combien y a-t-il d'éléments de X' tels qu'au moins un des y_i est non nul ?

3. Conclure en démontrant la loi de réciprocité quadratique.

Exercice 7.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique.

Montrer que $\mathrm{Re}(q) : x \mapsto \mathrm{Re}(q(x))$ est une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et donner sa signature en fonction du rang de q.

Exercice 8. (Topologie de l'espace des formes quadratiques réelles)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour p, $q \in [\![0, n]\!]$ tels que $p + q \leqslant n$, on note $\mathcal{Q}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (p, q).

1. Montrer que $\mathcal{Q}_{n,0}(E)$ et $\mathcal{Q}_{0,n}(E)$ sont ouverts dans $\mathcal{Q}(E)$.

2. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{Q}_{p,q}(E)$ est incluse dans $X := \bigcup_{p' \leqslant p, q' \leqslant q} \mathcal{Q}_{p',q'}(E)$.

3. Montrer que $\mathcal{Q}(E) \setminus X$ est ouvert. (*Indication* : Pour $Q \in \mathcal{Q}(E)$, considérer les applications qui à une forme quadratique de E associe sa restriction au sous-espace maximal défini positif (resp. défini négatif) de Q.)

4. En déduire que X est l'adhérence de $\mathcal{Q}_{p,q}(E)$.

Exercice 9. (Sous-espaces totalement isotropes : le retour)

On reprend les notations de l'exercice 9 du TD précédent. Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée de signature (s,t). Démontrer que la dimension d'un SETIM est $\min(s,t)$.

Exercice 10.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. On note $x_1, \dots, x_d$ les racines complexes distinctes de P, et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités respectives.

On définit une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\phi(R,S) := \sum_{i=1}^{d} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i).$$

On pose enfin $I \subset [\![1,d]\!]$ l'ensemble des i tels que $\alpha_i \in \mathbb{R}$; et $[\![1,d]\!] \setminus I = J \sqcup J^*$ tel que à tout $j \in J$ correspond $j^* \in J^*$ tel que $\alpha_{j^*} = \overline{\alpha_j}$.

1. Montrer que ϕ est bien à valeurs réelles.

2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{ev}_x : E \to \mathbb{C}$ l'évaluation en x.

(a) Montrer que les formes linéaires $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i \in [\![1,d]\!]}$ sont linéairement indépendantes dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes $\mathbb{R}$-linéaires $f : E \to \mathbb{C}$.

(b) On pose pour $j \in [\![1,d]\!]$

$$\phi_j := \begin{cases} \mathrm{ev}_{\alpha_j} & \text{si } j \in I \\ \mathrm{ev}_{\alpha_j} + \mathrm{ev}_{\overline{\alpha_j}} & \text{si } j \in J \\ i(\mathrm{ev}_{\alpha_j} - \mathrm{ev}_{\overline{\alpha_j}}) & \text{si } j \in J^* \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, ϕ_j est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et déduire que les $(\phi_j)_{j \in [\![1,d]\!]}$ sont linéairement indépendantes dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E^*.

3. On note (r,s) la signature de ϕ. En exprimant ϕ à l'aide des ϕ_j, montrer que l'on a $(r,s) = (\#I + \#J, \#J)$, et donc que $r+s$ est le nombre de racines distinctes de P et $r-s$ est le nombre de racines réelles de P [1].

---

1. Un calcul donne $\phi\left(\sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k, \sum_{\ell=0}^{n-1} s_\ell X^\ell\right) = \sum_{0 \leqslant k,\ell \leqslant n-1} \sigma_{k+\ell} r_k s_\ell$, où $\sigma_k = \sum_{i=1}^{d} m_i x_i^k$. Les σ_k sont appelées *sommes de Newton*, et on peut les déterminer uniquement à partir des coefficients du polynôme P à l'aide des relations coefficients-racines. Le résultat de l'exercice est donc que l'on peut compter le nombre de racines distinctes et de racines réelles distinctes d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ sans avoir à le factoriser !